



MECANIQUE DES FLUIDES

Hydrostatique

Chapitre 6
EXERCICES

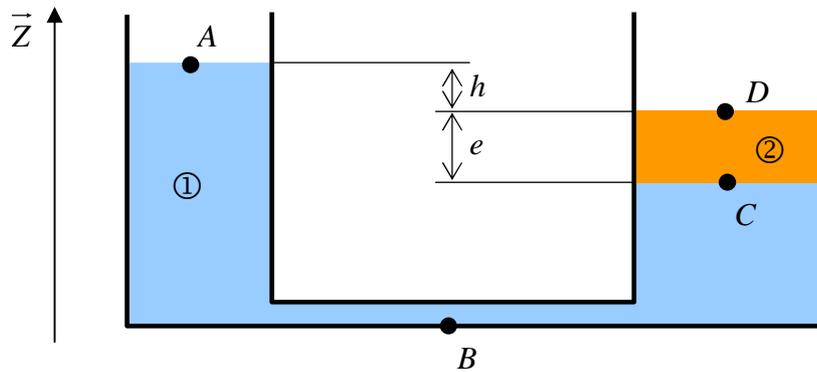
Feuille n°3
CORRECTION

Le dispositif envisagé ici peut permettre de déterminer la masse volumique ρ_2 d'un liquide ② connaissant celle du liquide ①, ρ_1 , ainsi que les distances e et h .

Bien évidemment, les liquides ① et ② doivent être non miscibles, c'est-à-dire ne pas se mélanger.

On note :

- e l'épaisseur de la couche du liquide ②, c'est-à-dire $e = z_D - z_C$.
- h la dénivelée entre les points A et D , c'est-à-dire $h = z_A - z_D$.



Le tout est placé sur terre (champ de pesanteur g et pression atmosphérique P_{atm} connus).

On désigne par:

- (O, \vec{z}) un axe vertical orienté positivement vers le haut,
- A , un point de la surface libre du liquide ①,
- B , le point « bas », $z_B = 0$,
- C , un point sur l'interface entre les deux liquides,
- D , un point de la surface libre du liquide ②.

Q1 – Dire sous quelle condition le liquide ② est au dessus du liquide ① (et pas l'inverse).

D'après le théorème d'Archimède ② sera « au dessus » de ① si on a $\rho_2 > \rho_1$.

Q2 - D'après l'énoncé, que valent les pressions p_A et p_D aux points A et D ?

Les points A et D étant sur les surfaces libres en contact avec l'air, leurs pressions sont égales : $p_A = p_D$.

Q3 - Appliquer la loi de l'hydrostatique entre les points A et B et exprimer p_A .

La loi de l'hydrostatique pour les liquides indique que la charge est constante en n'importe quel point du milieu liquide (huile) : $p + \rho \cdot g \cdot z = C^{ste}$

On est dans le liquide ① donc ici il faut prendre la masse volumique ρ_1 .

Appliqué au point A , on a : $p_A + \rho_1 \cdot g \cdot z_A = C^{ste}$

Appliqué au point B , on a : $p_B + \rho_1 \cdot g \cdot z_B = C^{ste}$

Par identification, on a :

$$p_A + \rho_1 \cdot g \cdot z_A = p_B + \rho_1 \cdot g \cdot z_B \quad \text{soit,} \quad p_A = p_B + \rho_1 \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$

Q4 - Appliquer la loi de l'hydrostatique entre les points C et D et exprimer p_D .

On est dans le liquide ② donc ici il faut prendre la masse volumique ρ_2 .

$$\text{On a : } p_C + \rho_2 \cdot g \cdot z_C = p_D + \rho_2 \cdot g \cdot z_D \quad \text{soit,} \quad p_D = p_C + \rho_2 \cdot g \cdot (z_C - z_D)$$

Q5 – Partant des deux précédentes relations et sachant que $p_A = p_D$ exprimer p_B .

$$p_A = p_D \Rightarrow p_B + \rho_1 \cdot g \cdot (z_B - z_A) = p_C + \rho_2 \cdot g \cdot (z_C - z_D) \Leftrightarrow p_B = p_C + \rho_2 \cdot g \cdot (z_C - z_D) - \rho_1 \cdot g \cdot (z_B - z_A)$$

Q6 - Appliquer la loi de l'hydrostatique entre les points B et C et exprimer p_B .

On est dans le liquide ① donc ici il faut prendre la masse volumique ρ_1 .

$$\text{On a : } p_B + \rho_1 \cdot g \cdot z_B = p_C + \rho_1 \cdot g \cdot z_C \quad \text{soit,} \quad p_B = p_C + \rho_1 \cdot g \cdot (z_C - z_B)$$

Q7 – Partant des deux expressions de p_B , montrer que $\rho_2 = \rho_1 \cdot \left(1 + \frac{h}{e}\right)$.

$$p_C + \rho_2 \cdot g \cdot (z_C - z_D) - \rho_1 \cdot g \cdot (z_B - z_A) = p_C + \rho_1 \cdot g \cdot (z_C - z_B)$$

$$\rho_2 \cdot g \cdot (z_C - z_D) - \rho_1 \cdot g \cdot (z_B - z_A) = \rho_1 \cdot g \cdot (z_C - z_B)$$

$$\rho_2 \cdot (z_C - z_D) - \rho_1 \cdot (z_B - z_A) = \rho_1 \cdot (z_C - z_B)$$

$$\rho_2 \cdot (z_C - z_D) = \rho_1 \cdot (z_C - z_B + z_B - z_A)$$

$$\rho_2 \cdot (z_C - z_D) = \rho_1 \cdot (z_C - z_A)$$

$$-\rho_2 \cdot e = -\rho_1 \cdot (h + e)$$

$$\rho_2 \cdot e = \rho_1 \cdot (h + e)$$

$$\rho_2 = \frac{\rho_1 \cdot (h + e)}{e}$$

Q8 – Application numérique.

Déterminer le liquide ② si on a $\rho_1 = 1000 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ (eau), $e = 1 \text{ cm}$ et $h = 12,54 \text{ cm}$.

$$\rho_2 = \frac{1000 \cdot (12,6 + 1)}{1} = 13600 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \Rightarrow \underline{\text{Mercure}}$$